

Formelsammlung für die Hochfrequenztechnik

<http://www.siart.de/lehre/hf-formeln.pdf>

Uwe Siart
tutorien@siart.de

21. Mai 2012 (Version 0.28)

Inhaltsverzeichnis

1	Natur- und Feldkonstanten	2
2	Bauelemente	2
3	Ebene Wellen	3
3.1	Ebene Wellen in Materialien	3
3.2	Polarisation	3
3.3	Freiraumausbereitung	4
3.4	Reflexion an Grenzflächen	4
4	Wellenleiter	4
4.1	TEM-Leitungen	4
4.2	Koaxialleitungen	5
4.3	Rechteckhohlleiter	5
4.4	Rundhohlleiter	6
4.5	Mikrostreifenleitungen	6
5	Antennen	6
6	Passive Schaltungen	7
6.1	Schwingkreise	7
6.2	Koppelschaltungen	7
6.3	Dämpfungsglieder	7
6.4	Filter	7
7	Mikrowellennetzwerke	8
8	Rauschen	8
9	Oszillatoren	9
10	Verstärker	9

1 Natur- und Feldkonstanten

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$c_0 = 299792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Vakuum-Permeabilität:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

Vakuum-Permittivität:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Feldwellenwiderstand im Vakuum:

$$Z_{F0} = \mu_0 c_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$$

Boltzmann-Konstante:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$$

2 Bauelemente

Eindringtiefe (äquivalente Leitschichtdicke):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \kappa \mu_0 \mu_r}}$$

κ : Leitfähigkeit (in S/m)

Stromdichte in der Leitschicht:

$$J(z) = J_0 \cdot e^{-(z/\delta)} \cdot e^{-j(z/\delta)}$$

Flächenwiderstand:

$$R_* = \frac{1}{\kappa \delta} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0 \mu_r}{\kappa}}$$

Spezifische Oberflächenimpedanz:

$$Z_* = (1 + j)R_*$$

Beziehung zwischen der Oberflächenstromdichte J_* und der tangentialen magnetischen Feldstärke H_{tan} an der Oberfläche:

$$J_* = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{\text{tan}}$$

Gleichstromwiderstand:

$$R_0 = \frac{\ell}{A_0 \kappa}$$

ℓ : Länge (in m)

A_0 : Querschnittsfläche (in m²)

Hochfrequenzwiderstand:

$$\frac{R_{\sim}}{R_0} = \frac{1}{4} \frac{D}{\delta} \quad \text{und} \quad R_{\sim} \propto \sqrt{f}$$

Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{a \cdot b}{\Delta}$$

a, b : Kantenlängen (in m)

Δ : Plattenabstand (in m)

Näherungsweise Berücksichtigung der Randstreuung:

$$a \mapsto a + \frac{\Delta}{2} \quad b \mapsto b + \frac{\Delta}{2}$$

Komplexe Dielektrizitätszahl:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = |\epsilon_r| e^{-j\delta_\epsilon} \approx |\epsilon_r| (1 - j \tan \delta_\epsilon)$$

Admittanz eines verlustbehafteten Kondensators:

$$Y = j\omega C + G_p = j\omega C + \omega C \tan \delta_\epsilon$$

Umrechnung zwischen Parallel- und Serienverlustwiderstand bei *kleinen* Verlusten:

$$R_p R_s = X^2 \quad \text{mit} \quad X_L = \omega L \quad \text{bzw.} \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Güte von verlustbehafteten reaktiven Bauelementen:

$$Q_C = \frac{\omega C}{G_p} = \frac{1}{\omega C R_s} = \frac{1}{\tan \delta_C}$$

$$Q_L = \frac{\omega L}{R_s} = \frac{1}{\omega L G_p} = \frac{1}{\tan \delta_L}$$

Induktivität einer Stromschleife:

$$L = \frac{\Phi_I}{I}$$

Induktivität eines Kreisringes:

$$L \approx \mu R \cdot \left(\ln \frac{R}{r} + 0,08 \right)$$

Induktivität einer Zylinderspule ohne Kern:

$$L \approx \mu_0 \frac{n^2 D^2 \pi}{4(\ell + 0,45 D)}$$

n : Windungszahl

D : Durchmesser (in m)

ℓ : Länge (in m)

Induktivität eines Ringkernes mit Luftspalt:

$$L = n^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{\ell_m} \cdot \frac{1}{1 + \mu_r \frac{\ell_L}{\ell_m}}$$

A: Querschnittsfläche (in m²)
 ℓ_m : mittlere Feldlinienlänge (in m)
 ℓ_L : Länge des Luftspalts (in m)

Gegeninduktivität:

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$$

Koppelfaktor:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad 0 \leq k \leq 1$$

Gekoppelte Induktivitäten:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} L_1 & \pm M \\ \pm M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Reihenschaltung gekoppelter Induktivitäten:

$$L_{\text{ges}} = L_1 + L_2 \pm 2M$$

3 Ebene Wellen

3.1 Ebene Wellen in Materialien

Phasengeschwindigkeit:

$$v_p = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

Phasenkonstante:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_p}$$

Komplexe Materialparameter:

$$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r'' = |\epsilon_r| e^{-j\delta_\epsilon}$$

$$\mu_r = \mu_r' - j\mu_r'' = |\mu_r| e^{-j\delta_\mu}$$

Wellenzahl:

$$k = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \cos\left(\frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2}\right)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \sin\left(\frac{\delta_\epsilon + \delta_\mu}{2}\right)$$

Feldwellenwiderstand:

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_{F0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Strahlungsleistungsdichte:

$$P_* = |\mathbf{P}_*| = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}|^2}{Z_F} = \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 Z_F$$

3.2 Polarisation

Elektrische Feldstärke (Ausbreitung in z-Richtung):

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}(0) \cdot e^{-jkz} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \cdot e^{-jkz} = \begin{pmatrix} |E_x| e^{j\delta_x} \\ |E_y| e^{j\delta_y} \end{pmatrix} \cdot e^{-jkz}$$

Orientierungswinkel:

$$\tan(2\psi) = \frac{2|E_x||E_y|}{\sqrt{|E_x|^2 - |E_y|^2}} \cos(\delta_y - \delta_x)$$

Elliptizität:

$$\sin(2\chi) = \frac{2|E_x||E_y|}{\sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}} \sin(\delta_y - \delta_x)$$

Stokes-Vektor:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2\text{Re}\{E_x E_y^*\} \\ 2\text{Im}\{E_x E_y^*\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x|^2 + |E_y|^2 \\ |E_x|^2 - |E_y|^2 \\ 2|E_x||E_y| \cos(\delta_y - \delta_x) \\ -2|E_x||E_y| \sin(\delta_y - \delta_x) \end{pmatrix}$$

$$= (|E_x|^2 + |E_y|^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\psi) \cos(2\chi) \\ \sin(2\psi) \cos(2\chi) \\ \sin(2\chi) \end{pmatrix}$$

Müller-Matrix:

$$\mathbf{F}_E = \frac{1}{r^2} \mathbf{M} \mathbf{F}_S$$

\mathbf{F}_E : Stokes-Vektor am Empfangsort

\mathbf{F}_S : Stokes-Vektor am Sendort

Komplexes Polarisationsverhältnis:

$$\rho = \frac{|E_y|}{|E_x|} \cdot e^{j(\delta_y - \delta_x)} = \frac{\cos(2\chi) \sin(2\psi) + j \sin(2\chi)}{1 + \cos(2\chi) \cos(2\psi)}$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctan\left\{ \frac{2\text{Re}\{\rho\}}{1 - |\rho|^2} \right\} + 180^\circ \quad \text{mod } \{180^\circ\}$$

$$\chi = \frac{1}{2} \arcsin\left\{ \frac{2\text{Im}\{\rho\}}{1 + |\rho|^2} \right\}$$

Polarisationsvektor:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mathbf{E}(0)}{|\mathbf{E}|} = \frac{1}{\sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2}} \begin{pmatrix} |E_x| e^{j\delta_x} \\ |E_y| e^{j\delta_y} \end{pmatrix}$$

Polarisationsbasis:

$$\mathbf{E}(0) = E_A \cdot \boldsymbol{\epsilon}_A + E_B \cdot \boldsymbol{\epsilon}_B$$

Orthogonalität:

$$\boldsymbol{\epsilon}_1^H \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 = 0$$

oder

$$\psi_2 = \psi_1 + 90^\circ \pmod{180^\circ} \quad \wedge \quad \chi_2 = -\chi_1$$

oder

$$\rho_2 = -\frac{1}{\rho_1^*}$$

Kohärenzmatrix:

$$J = \begin{pmatrix} \langle |E_A|^2 \rangle & \langle E_A E_B^* \rangle \\ \langle E_B E_A^* \rangle & \langle |E_B|^2 \rangle \end{pmatrix}$$

Polarisationsgrad:

$$p = \sqrt{1 - \frac{4 \det J}{(\text{Spur } J)^2}} \quad ; \quad p \in [0,1]$$

3.3 Freiraumausbreitung

Empfangsleistung bei einer Freiraumfunkstrecke:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{G_S}{4\pi r^2} A_W = \frac{G_S}{4\pi r^2} \cdot \frac{\lambda_0^2}{4\pi} G_E = \frac{\lambda_0^2}{(4\pi r)^2} G_S G_E$$

G_S : Gewinn der Sendeantenne

G_E : Gewinn der Empfangsantenne

A_W : Antennenwirkfläche (in m^2)

Zahlenwertgleichung für die Funkfelddämpfung:

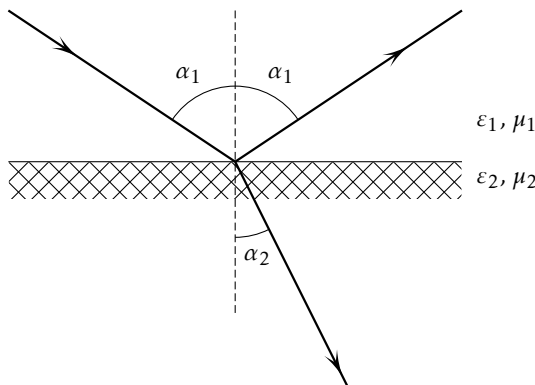
$$\frac{a_F}{\text{dB}} = -20 \lg \frac{\lambda_0}{4\pi r} = 92,4 + 20 \lg \frac{f}{\text{GHz}} + 20 \lg \frac{r}{\text{km}}$$

Funkhorizont:

$$d_{\text{Funk}} = \sqrt{2 \cdot k_e \cdot R \cdot h_A} = \sqrt{2 \cdot (4/3) \cdot R \cdot h_A}$$

3.4 Reflexion an Grenzflächen

Reflexion an einer dielektrischen Grenzschicht:

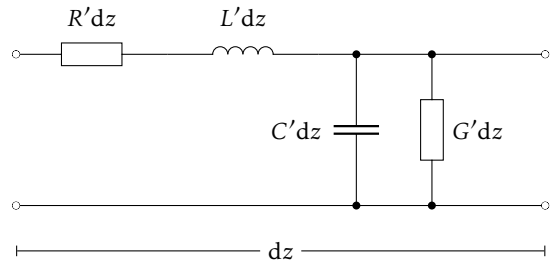


$$r_{\perp} = \frac{E_r}{E_h} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}{\sqrt{\epsilon_1} \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \alpha_1}}$$

$$r_{\parallel} = \frac{E_r}{E_h} = \frac{\epsilon_2 \cos \alpha_1 - \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}}{\epsilon_2 \cos \alpha_1 + \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2 - \epsilon_1^2 \sin^2 \alpha_1}}$$

4 Wellenleiter

4.1 TEM-Leitungen



Leitungswellenwiderstand:

$$Z_L = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

R' : Widerstandsbelag (in Ω/m)

L' : Induktivitätsbelag (in H/m)

G' : Leitwertbelag (in S/m)

C' : Kapazitätsbelag (in F/m)

Ausbreitungsmaß:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

α : Dämpfungskonstante (in Np/m)

β : Phasenkonstante (in rad/m)

Näherungen für kleine Verluste:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'}$$

$$\alpha = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Spannung und Strom:

$$U(z) = U_h e^{-\gamma z} + U_r e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_h e^{-\gamma z} - I_r e^{\gamma z}$$

mit $I_{h,r} = U_{h,r}/Z_L$

Wirkleistungsfluss wenn $U_r = 0$:

$$P(z) = \frac{|U(z)|^2}{2Z_L} = \frac{|U_h|^2}{2Z_L} e^{-2\alpha z} = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Verlustleistungsbelag:

$$-\frac{dP}{dz} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z}$$

P_0 : Leistung an der Stelle $z = 0$ (in W)

Verzerrungsfreiheit:

$$\frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}$$

Impedanztransformation:

$$Z_E = Z_L \frac{Z_A + Z_L \tanh(\gamma \ell)}{Z_L + Z_A \tanh(\gamma \ell)}$$

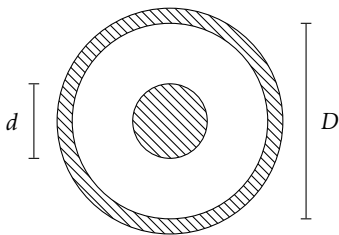
Eingangsimpedanz offene Leitung:

$$Z_E = Z_L \coth(\gamma \ell) \stackrel{\alpha=0}{=} -jZ_L \cot(\beta \ell)$$

Eingangsimpedanz kurzgeschlossene Leitung:

$$Z_E = Z_L \tanh(\gamma \ell) \stackrel{\alpha=0}{=} jZ_L \tan(\beta \ell)$$

4.2 Koaxialleitungen



Leitungsbeläge:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r'}{\ln(D/d)} \quad L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

$$G' = \omega C' \cdot \tan \delta \quad R' = \frac{R_*}{\pi} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d}\right)$$

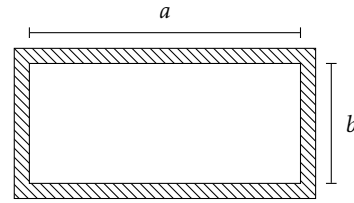
Leitungswellenwiderstand:

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d}$$

Elektrische Feldstärke:

$$E_r(z) = \frac{U(z)}{r \ln \frac{D}{d}}$$

4.3 Rechteckhohlleiter



Eigenwert (identisch für H_{mn} - und E_{mn} -Typen):

$$q_v = \sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}$$

Wellenzahl im Ausbreitungsmedium:

$$k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r$$

Ausbreitungsmaß des ν -ten Modes:

$$\gamma_\nu = \sqrt{q_\nu^2 - k^2}$$

Eckfrequenz des ν -ten Modes:

$$f_{c\nu} = \frac{c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} q_\nu$$

Cutoff-Wellenlänge des ν -ten Modes:

$$\lambda_{c\nu} = \frac{2\pi\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{q_\nu} = \frac{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$\lambda_{c,10} = 2a\sqrt{\epsilon_r\mu_r}$$

Feldwellenwiderstände:

$$Z_{FE} = \frac{\gamma_E}{j\omega\epsilon_0\epsilon_r} = Z_F \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c\nu}}\right)^2}$$

$$Z_{FH} = \frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\gamma_H} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c\nu}}\right)^2}}$$

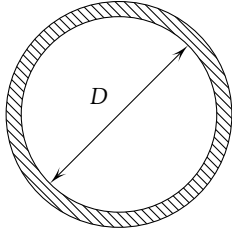
Hohlleiter-Wellenlänge:

$$\lambda_z = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c\nu}}\right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit:

$$v_g = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c\nu}}\right)^2}$$

4.4 Rundhohlleiter



Cutoff-Wellenlänge:

$$\lambda_{c,mn} = \frac{\pi D}{p_{mn}}$$

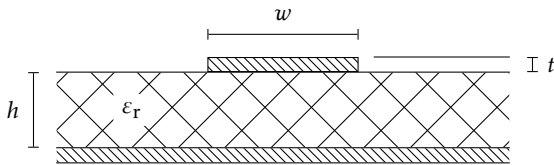
Wertetabelle für p_{mn} :

n	H _{mn} -Typen			E _{mn} -Typen		
	p _{m1}	p _{m2}	p _{m3}	p _{m1}	p _{m2}	p _{m3}
0	3,832	7,016	10,174	2,405	5,520	8,654
1	1,841	5,331	8,536	3,832	7,016	10,174
2	3,054	6,706	9,970	5,135	8,417	11,620

Phasenkonstante:

$$\beta_{mn} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{p_{mn}}{D/2}\right)^2}$$

4.5 Mikrostreifenleitungen



Effektive Breite (quasistatisch):

$$\frac{w_{\text{eff}}}{h} = \frac{w}{h} + \frac{5}{4\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{4\pi w}{t}\right) \quad \frac{w}{h} < \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{w_{\text{eff}}}{h} = \frac{w}{h} + \frac{5}{4\pi} \frac{t}{h} \left(1 + \ln \frac{2h}{t}\right) \quad \frac{w}{h} \geq \frac{1}{2\pi}$$

Leitungswellenwiderstand (quasistatisch):

$$Z_L = \frac{Z_{F0}}{2\pi\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \ln\left(\frac{8h}{w_{\text{eff}}} + \frac{w_{\text{eff}}}{4h}\right) \quad \frac{w}{h} \leq 1$$

$$Z_L = \frac{Z_{F0}/\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}}{\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,393 + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,444\right)} \quad \frac{w}{h} > 1$$

Effektive relative Permittivität (quasistatisch):

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} F - C$$

mit

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} + 0,04(1 - w/h)^2 \quad \frac{w}{h} \leq 1$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/w}} \quad \frac{w}{h} > 1$$

$$C = \frac{\epsilon_r - 1}{4,6} \frac{t/h}{\sqrt{w/h}}$$

Dispersion:

$$\epsilon_{r,\text{eff}}(f) = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_{r,\text{eff}}(0)}{1 + G\left(\frac{f}{f_p}\right)^2}$$

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}(f)}$$

mit

$$f_p = \frac{Z_{F0}}{2\mu_0 h} \quad G = \frac{\pi^2}{12} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_{r,\text{eff}}(0)} \sqrt{\frac{2\pi Z_L}{Z_{F0}}}$$

Dämpfung durch dielektrische Verluste:

$$\frac{\alpha_d}{\text{dB/m}} = 27,3 \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_{r,\text{eff}}}} \left(\frac{\epsilon_{r,\text{eff}} - 1}{\epsilon_r - 1}\right) \frac{\tan \delta}{\lambda_0}$$

Dämpfung durch Leiterverluste:

$$\frac{\alpha_L}{\text{dB/m}} = 1,38 \frac{R_*}{h Z_L} \frac{32 - (w_{\text{eff}}/h)^2}{32 + (w_{\text{eff}}/h)^2} \Lambda$$

$$\frac{\alpha_L}{\text{dB/m}} = 6,1 \cdot 10^{-5} \frac{R_* Z_L \epsilon_{r,\text{eff}}}{h} \left(\frac{w_{\text{eff}}}{h} + \frac{\frac{2}{3} \frac{w_{\text{eff}}}{h}}{\frac{w_{\text{eff}}}{h} + 1,444} \right) \Lambda$$

mit

$$\Lambda = 1 + \frac{h}{w_{\text{eff}}} \left(1 + \frac{5t}{4\pi w} + \frac{5}{4\pi} \ln \frac{4\pi w}{t}\right) \quad \frac{w}{h} < \frac{1}{2\pi}$$

$$\Lambda = 1 + \frac{h}{w_{\text{eff}}} \left(1 - \frac{5t}{4\pi w} + \frac{5}{4\pi} \ln \frac{2h}{t}\right) \quad \frac{w}{h} \geq \frac{1}{2\pi}$$

5 Antennen

Strahlungswiderstand des hertzischen Dipols:

$$R_S = 80\Omega \cdot \pi^2 \left(\frac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2$$

Isotroper Kugelstrahler:

$$P_{*,i} = \frac{P_S}{4\pi r^2} \quad (\text{Strahlungsleistungsdichte})$$

$$A_{W,i} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \quad (\text{Wirkfläche})$$

Wirkfläche einer Antenne mit dem Gewinn G :

$$A_W = A_{W,i} \cdot G = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \cdot G$$

Abschätzung der Halbwertsbreite:

$$\gamma_{3\text{dB}} \approx 70^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

Abschätzung der Halbwertsbreite (Zweiwegediagramm):

$$\gamma_{3\text{dB}} \approx 50^\circ \cdot \frac{\lambda_0}{D}$$

Abschätzung der Fernfeldgrenze:

$$R \approx 2 \frac{D^2}{\lambda_0}$$

D : größte Ausdehnung der Antennenapertur

6 Passive Schaltungen

6.1 Schwingkreise

Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Resonanzblindwiderstand und -blindleitwert:

$$X_R = \omega_R L = \frac{1}{\omega_R C} \quad B_R = \omega_R C = \frac{1}{\omega_R L}$$

Güte:

$$Q = \frac{X_R}{R} = \frac{B_R}{G}$$

Relative Verstimmung:

$$v = \frac{\omega}{\omega_R} - \frac{\omega_R}{\omega}$$

Bandbreite:

$$B = \frac{f_R}{Q}$$

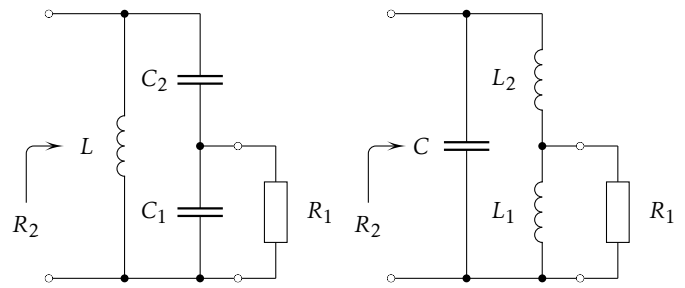
Impedanz und Admittanz:

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R(1 + jQv)$$

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G(1 + jQv)$$

6.2 Koppelschaltungen

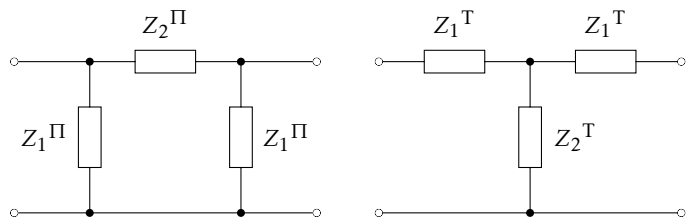
Resonanztransformation:



$$R_2 = \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2} \right)^2 R_1$$

$$R_2 = \left(\frac{L_1 + L_2}{L_1} \right)^2 R_1$$

6.3 Dämpfungsglieder



Angepasstes Π -Dämpfungsglied:

$$Z_1^{\Pi} = \frac{Z_0}{\tanh \frac{a}{2}} \quad Z_2^{\Pi} = Z_0 \cdot \sinh a$$

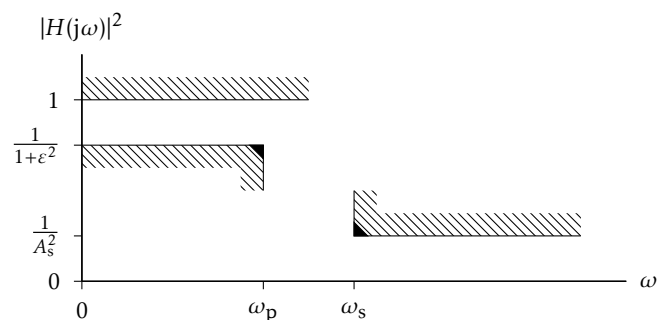
Angepasstes T-Dämpfungsglied:

$$Z_1^T = Z_0 \cdot \tanh \frac{a}{2} \quad Z_2^T = \frac{Z_0}{\sinh a}$$

mit $a = \ln|U_1/U_2|$.

6.4 Filter

Toleranzschema für Tiefpässe:



7 Mikrowellennetzwerke

ω_p : Ende des Passbandes
 ω_s : Beginn des Sperrbandes
 A_s^2 : minimale Sperrdämpfung

Butterworth-Tiefpass:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}} \quad ; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}$$

3-dB-Grenzfrequenz:

$$\omega_{3\text{dB}} = \omega_p / \varepsilon$$

Butterworth-Filterordnung:

$$n \approx \frac{\ln(A_s/\varepsilon)}{\ln(\omega_s/\omega_p)}$$

Tschebyscheff-Tiefpass:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}$$

T_n : Tschebyscheff-Polynom n -ter Ordnung

Tschebyscheff-Filterordnung:

$$n \approx \frac{\text{arccosh}(A_s/\varepsilon)}{\text{arccosh}(\omega_s/\omega_p)}$$

Tiefpass-Hochpass-Transformation:

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{\Omega}$$

Tiefpass-Bandpass-Transformation:

$$\Omega \rightarrow \kappa \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{p1} \omega_{p2}} \quad \kappa = \frac{\omega_0}{\omega_{p2} - \omega_{p1}}$$

ω_0 : Mittenfrequenz
 κ : relative Bandbreite

Tiefpass-Bandsperre-Transformation:

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{\kappa \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Wellengrößen:

$$a = \frac{U + IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_h}{\sqrt{Z_0}} = I_h \sqrt{Z_0}$$

$$b = \frac{U - IZ_0}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_r}{\sqrt{Z_0}} = I_r \sqrt{Z_0}$$

Reflexionsfaktor:

$$r = \frac{z - 1}{z + 1} \quad z = \frac{1 + r}{1 - r}$$

$\lambda/4$ -Transformator:

$$Z_L = \sqrt{Z_1 Z_2}$$

Reflexionsfaktortransformation durch eine Leitung:

$$r_E = r_A e^{-2\gamma \ell}$$

Streumatrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Wellenkettensmatrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Umrechnung zwischen Streu- und Kettenform:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{s_{21}} \begin{pmatrix} -\det \mathbf{S} & s_{11} \\ -s_{22} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{c_{22}} \begin{pmatrix} c_{12} & \det \mathbf{C} \\ 1 & -c_{21} \end{pmatrix}$$

Reflexionsfaktortransformation durch ein Zweiter:

$$r_E = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21} \cdot r_A}{1 - s_{22} \cdot r_A} = \frac{s_{11} - \det \mathbf{S} \cdot r_A}{1 - s_{22} \cdot r_A}$$

Verlustfreiheit bei Mehrport:

$$\mathbf{S}^H \mathbf{S} = \mathbf{E}$$

8 Rauschen

Verfügbare Rauschleistung eines thermisch rauschenden ohmschen Widerstands:

$$P_V = \frac{|\tilde{U}_R|^2}{4R} = kT \cdot \Delta f$$

Verfügbare Rauschleistung bei Raumtemperatur:

$$\frac{P_V}{\text{dBm}} = -174 + 10 \lg \frac{\Delta f}{\text{Hz}} \quad \text{bei } T_0 = 300 \text{ K}$$

Boltzmann-Konstante:

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Ws/K}$$

Serienschaltung von Rauschspannungsquellen:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_R &= \sqrt{\tilde{U}_{R1}^2 + \tilde{U}_{R2}^2} \quad (\text{unkorreliert}) \\ \tilde{U}_R &= \tilde{U}_{R1} + \tilde{U}_{R2} \quad (\text{voll korreliert})\end{aligned}$$

Verfügbare Rauschleistung am Ausgang eines rauschenden Zweitorts:

$$N_2 = k \Delta f G T_1 + k \Delta f G T_1 F_Z(T_1)$$

Umrechnung der Zusatzrauschzahl auf eine andere Generator-temperatur:

$$F_Z(T_1) = \frac{T_0}{T_1} \cdot F_Z(T_0)$$

Kettenrauschzahl:

$$F_{Z, \text{ges}} = F_{Z1} + \frac{F_{Z2}}{v_{p1}} + \frac{F_{Z3}}{v_{p1} v_{p2}} + \dots + \frac{F_{ZN}}{v_{p1} v_{p2} \dots v_{pN-1}}$$

Systemrauschtemperatur:

$$T_S = T_A + F_Z T_0$$

Empfänger-Grenzfeldstärke:

$$\tilde{E}_g = \frac{1}{h_{\text{eff}}} \sqrt{4k T_S R_i \cdot \Delta f}$$

9 Oszillatoren

Anschwingbedingung bei Entdämpfung eines Parallelresonanzkreises:

$$G_n = G_L \quad \wedge \quad \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

Anschwingbedingung bei Rückkopplung eines Verstärkers:

$$|k| \cdot |v| = 1 \quad \wedge \quad \varphi_v + \varphi_k = 2n\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

10 Verstärker

Klemmenleistungsgewinn:

$$\begin{aligned}G &= \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{Leistung vom Generator}} \\ &= \frac{|s_{21}(1 - |r_L|^2)|^2}{1 - |s_{11}|^2 + |r_L|^2 (|s_{11}|^2 - |\det \mathbf{S}|^2) - 2 \operatorname{Re}\{r_L (s_{22} - s_{11}^* \det \mathbf{S})\}}\end{aligned}$$

Übertragungsgewinn (Betriebsleistungsgewinn):

$$\begin{aligned}G_T &= \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{vom Generator verfügbare Leistung}} \\ &= \frac{1 - |r_G|^2}{|1 - r_G s_{11}|^2} |s_{21}|^2 \frac{1 - |r_L|^2}{|1 - r_L r_2|^2}\end{aligned}$$

Verfügbare Leistungsgewinn:

$$\begin{aligned}G_{\text{max}} &= \frac{\text{vom Verstärker verfügbare Leistung}}{\text{vom Generator verfügbare Leistung}} \\ &= |s_{21}|^2 \frac{1 - |r_L|^2}{(1 - |r_G|^2) |1 - r_L s_{22}|}\end{aligned}$$

Einfügungsgewinn:

$$G = \frac{\text{Leistung an die Last}}{\text{Leistung vom Generator an die Last}}$$

Stabilitätsfaktor:

$$K = \frac{1 - |s_{11}|^2 - |s_{22}|^2 + |\det \mathbf{S}|^2}{2 |s_{12}| |s_{21}|}$$

Stabilitätsbedingung für einzelnen Transistor:

$$K > 1 \quad \wedge \quad |\det \mathbf{S}| < 1$$

Stabilitätskreis Lastreflexionsfaktor:

$$\begin{aligned}M_L &= \frac{s_{22}^* - s_{11} (\det \mathbf{S})^*}{|s_{22}|^2 - |\det \mathbf{S}|^2} \quad \text{Mittelpunkt} \\ R_L &= \left| \frac{s_{21} s_{12}}{|s_{22}|^2 - |\det \mathbf{S}|^2} \right| \quad \text{Radius}\end{aligned}$$

Stabilitätskreis Generatorreflexionsfaktor:

$$\begin{aligned}M_G &= \frac{s_{11}^* - s_{22} (\det \mathbf{S})^*}{|s_{11}|^2 - |\det \mathbf{S}|^2} \quad \text{Mittelpunkt} \\ R_G &= \left| \frac{s_{21} s_{12}}{|s_{11}|^2 - |\det \mathbf{S}|^2} \right| \quad \text{Radius}\end{aligned}$$

Quellen und weiterführende Literatur

- [1] I. J. Bahl and P. Bhartia: *Microstrip Antennas*. Dedham, MA: Artech House, 1980.
- [2] C. A. Balanis: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Chichester: John Wiley & Sons, 1989.
- [3] C. A. Balanis: *Antenna Theory. Analysis and Design*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [4] H. Brand: *Schaltungslehre linearer Mikrowellenetze*. Stuttgart: Hirzel-Verlag, 1970.
- [5] R. E. Collin: *Antennas and Radiowave Propagation*. New York: McGraw-Hill, 1985.
- [6] R. E. Collin: *Foundations for Microwave Engineering*. 2nd ed. IEEE Press Series on Electromagnetic Theory. Hoboken, New Jersey: Wiley & Sons, 2001.
- [7] J. Detlefsen und U. Siart: *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*. 4. Aufl. München: Oldenbourg, 2012.
- [8] E. O. Hammerstad: "Equations for Microstrip Circuit Design". In: *Proc. 5th European Microwave Conference*. Hamburg, Germany, September 1975, pp. 268–272.
- [9] E. O. Hammerstad and O. Jensen: "Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design". In: *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. Washington, DC, USA, May 28–30, 1980, pp. 407–409.

- [10] A. Ishimaru: *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- [11] K. W. Kark: *Antennen und Strahlungsfelder*. 4. Aufl. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.
- [12] M. Kobayashi: "A Dispersion Formula Satisfying Recent Requirements in Microstrip CAD". In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* MTT-36.8 (August 1988), pp. 1246–1250.
- [13] M. K. Krage and G. I. Haddad: "Frequency-Dependent Characteristics of Microstrip Transmission Lines". In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* MTT-20.10 (October 1972), pp. 678–688.
- [14] J. D. Kraus: *Antennas*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1988.
- [15] T. H. Lee: *Planar Microwave Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [16] S. J. Orfanidis: *Electromagnetic Waves and Antennas*. Rutgers University, August 31, 2010. url: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa> (visited on 05/19/2011).
- [17] U. Tietze und Ch. Schenk: *Halbleiter-Schaltungstechnik*. 12. Aufl. Berlin: Springer, 2002.
- [18] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 1*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 6. Aufl. Berlin: Springer, 2000.
- [19] O. Zinke und H. Brunswig: *Hochfrequenztechnik 2*. Hrsg. von A. Vlcek, H. L. Hartnagel und K. Mayer. 5. Aufl. Berlin: Springer, 1999.